

Cet article est disponible en ligne à l'adresse :

http://www.cairn.info/article.php?ID_REVUE=ECOP&ID_NUMPUBLIE=ECOP_149&ID_ARTICLE=ECOP_149_0073

Risque associé au contrat d'assurance-vie pour la compagnie d'assurance

par Christophe BERTHELOT, Mireille BOSSY et Nathalie PISTRE

| La Documentation française | *Économie et Prévision*

2001/3 - n° 149

ISSN 0249 - 4744 | pages 73 à 85

Pour citer cet article :

— Berthelot C., Bossy M. et Pistre N., Risque associé au contrat d'assurance-vie pour la compagnie d'assurance, *Économie et Prévision* 2001/3, n° 149, p. 73-85.

Distribution électronique Cairn pour La Documentation française.

© La Documentation française. Tous droits réservés pour tous pays.

La reproduction ou représentation de cet article, notamment par photocopie, n'est autorisée que dans les limites des conditions générales d'utilisation du site ou, le cas échéant, des conditions générales de la licence souscrite par votre établissement. Toute autre reproduction ou représentation, en tout ou partie, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit, est interdite sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, en dehors des cas prévus par la législation en vigueur en France. Il est précisé que son stockage dans une base de données est également interdit.

Risque associé au contrat d'assurance-vie pour la compagnie d'assurance

Christophe Berthelot^(*)

Mireille Bossy^(**)

Nathalie Pistre^(***)

Les contrats d'assurance-vie en francs sont de fait des contrats de capitalisation assurant une rémunération aux assurés liée à la rentabilité du portefeuille d'actifs investis au regard des contrats mais avec un rendement garanti en cas de baisse de la valeur de celui-ci dont le risque est supporté par l'assureur.

Typiquement l'assuré verse une somme ou une série de sommes d'argent et perçoit une rémunération qui a le double avantage de présenter un taux garanti et de profiter d'une évolution favorable de l'actif. Ces avantages, concédés gratuitement, sont pénalisés fiscalement lorsque la sortie s'effectue avant 8 ans.

Une partie importante des bilans des compagnies d'assurance est financée par cette activité mais le chiffre d'affaires (498 milliards de francs en 1998) est en contraction, notamment parce que les avantages fiscaux ont un peu diminué et que les contrats en unités de compte ont bénéficié d'une période boursière avantageuse. Cette situation entraîne une concurrence accrue entre les compagnies qui les pousse à verser une part importante des bénéfices, à réduire leurs marges et à fragiliser leur bilan.

Outre les risques de liquidité et risque de contrepartie, les compagnies sont soumises au risque de marchés, en particulier au risque de taux prépondérant dans l'activité d'assurance-vie. Ce risque est d'autant plus sensible que les assurés peuvent toujours choisir de sortir du contrat (rachat), ce qui est généralement visualisé comme une option gratuite difficile à gérer pour les assureurs.

En cas de hausse des taux, et si l'assureur ne peut adapter le rendement offert instantanément, le risque est fort que l'assuré choisisse de retirer son placement et ceci au pire moment pour la compagnie (baisse de la valeur d'actif). En cas de baisse des taux, le taux garanti dans le contrat peut être trop élevé par rapport aux opportunités de marché. Les variations brutales des taux d'intérêt ont ainsi été la cause de l'insolvabilité d'un nombre croissant d'assureurs-vie aux États-Unis (Babbal et Santomero, 1999).

Nous cherchons à caractériser le risque associé à un contrat d'assurance-vie pour la compagnie d'assurance. Nous avons choisi l'exemple d'un portefeuille fermé constitué d'un contrat à versement de prime unique qui comporte un taux garanti fixe plus une participation aux bénéfices de la compagnie. Nous nous intéressons uniquement aux "chutes" des contrats dus aux rachats liés à l'évolution des conditions de marchés (nous ne prenons pas en compte les rachats naturels ni les décès qui sont indépendants des variables financières). Notre but est d'analyser ce risque en fonction des caractéristiques du contrat et des variables financières, en particulier de l'analyser en

(*) Bull, Louveciennes.

(**) Inria-Sophia Antipolis.

(***) Ensae, Malakoff.

E-mail: npistre@cdcixis-am.com

fonction des différentes composantes du contrat (fiscalité, taux garanti, participation).

Dans une première partie, nous développons une analyse qualitative du risque associé au contrat. En particulier nous montrons qu'affirmer simplement que la valeur de ce risque est la somme des prix "Black/Scholes" des options implicites dans le contrat détourne de l'analyse rigoureuse du risque réel du contrat. Nous montrerons que ce type de contrat donne lieu à des options qui sont plus proches des options réelles que des options purement financières négociables sur un marché.

Dans un deuxième temps, nous quantifions (par des simulations numériques) le risque couru par les actionnaires au regard de la valeur des capitaux propres dans un environnement de marchés stochastique où les assurés ont la possibilité de racheter leur contrat. Nous mettons en évidence la distribution de probabilité de la rentabilité des capitaux propres et développons en particulier une analyse de sensibilité du risque en fonction des paramètres caractéristiques du contrat : taux garanti, fiscalité, participation.

Le contrat d'assurance étudié : analyse en termes d'options réelles et analyse qualitative du risque

Nous nous intéressons au risque encouru par la compagnie d'assurance suite à la signature d'un contrat à prime unique de durée contractuelle de 8 ans. L'assuré a droit à un taux garanti et à une participation aux bénéfices générés par les actifs mis en représentation des contrats.

La réglementation prévoit l'appartenance des actifs admis en représentation à une liste assez large (valeurs mobilières et titres assimilés, actifs immobiliers, prêts et dépôts) et des règles de diversification (les actions ne doivent pas dépasser 65 % et les actifs immobiliers 40 %). Le taux garanti est par ailleurs réglementé (article A132-1 et suivants du Code des Assurances). Pour les contrats de durée supérieure ou égale à 8 ans, il doit être inférieur à Min (3,5% ; 60 % TME). Pour des contrats plus anciens, on peut trouver des taux garantis à 4,5 % ou même à 6,5 %.

La participation au bénéfice est au minimum égale à 85 % des bénéfices financiers (intérêts et plus-values) calculés par la moyenne des taux de rendement des actifs des deux dernières années.

Appelons A_0 la valeur de l'actif (et du passif) de la Compagnie d'assurance à l'instant 0. Le passif est financé pour une proportion α par les primes versées par les assurés.

Le contrat stipule un taux de rendement garanti ρ_0 qui s'applique à la valeur de départ αA_0 pour donner une valeur garantie à tout instant t de $G_t = \alpha A_0 \exp(\rho_0 t)$. L'assuré reçoit à la fin du contrat :

$$F_T = G_T + \delta(\alpha A_T - G_T)^+$$

$$\text{où } (\alpha A_T - G_T)^+ = \alpha A_T - G_T, \text{ si } \alpha A_T - G_T > 0$$

$$(\alpha A_T - G_T)^+ = 0, \text{ sinon.}$$

La part $\delta(\alpha A_T - G_T)^+$ correspond à la participation aux bénéfices éventuels, δ étant le taux de participation.

Si l'assuré décide de se retirer du contrat avant la fin des 8 ans, il est soumis à une pénalité de la part de la compagnie $p(t)$ et par une pénalité fiscale dont la valeur dépend de la législation et de la date de sortie effective et que nous désignerons par $\phi(t)$. Ainsi, l'assuré reçoit :

$$F_t = (1 - \phi(t))(1 - p(t))[G_t + \delta(\alpha A_t - G_t)^+] + \phi(t)F_0$$

En résumé, nous avons les trois situations suivantes :

La situation 1 correspond à la faillite de la compagnie d'assurance, la situation 2 au cas où l'assuré est rémunéré pour son taux garanti sans que les bénéfices de la compagnie lui permettent d'être rétribué davantage et la situation 3 reflète le cas favorable où le taux garanti ne joue pas car les bénéfices permettent une rémunération plus importante que ce dernier.

Il est aisé de voir que la valeur des capitaux propres est la différence entre la valeur de deux "contrats dérivés" dont les flux sont ceux d'options d'achat, de

	1 : $A_t < (1 - p(t)) G_t$	2 : $\alpha(1 - p(t)) A_t < (1 - p(t)) G_t < A_t$	3 : $G_t < \alpha A_t$
Assurés : F_t	A_t	$(1 - \phi(t))(1 - p(t)) G_t + \phi(t) F_0$	$(1 - \phi(t))(1 - p(t)) [G_t + \delta(\alpha A_t - G_t)] + \phi(t) F_0$
Actionnaire : CP_t	0	$A_t - (1 - p(t)) G_t$	$A_t - (1 - p(t)) [G_t + \delta(\alpha A_t - G_t)]$
État	0	$\phi(t)((1 - p(t)) G_t - F_0)$	$\phi(t)((1 - p(t)) [G_t + \delta(\alpha A_t - G_t)] - F_0)$

même prix d'exercice $(1 - p(t))G_t$, croissant dans le temps, ce qui est généralement traduit par :

$$\begin{aligned} CP_t &= \text{Max}(A_t - (1 - p(t))G_t; 0) \\ &\quad - \delta(1 - p(t)) \text{Max}(\alpha A_t - G_t; 0) \\ &= \text{Call}(A_t; (1 - p(t))G_t) \\ &\quad - \delta \text{Call}(\alpha(1 - p(t))A_t; (1 - p(t))G_t) \end{aligned}$$

Le deuxième *Call* est de valeur nulle si $\alpha A_t \leq G_t$.

Remarquons par ailleurs que la valeur du premier *Call* sera de toute façon inférieure à un call de prix d'exercice $\alpha(1 - p(t))A_t$ qui serait la valeur du contrat sans taux garanti aux assurés. Cette écriture sous forme de call ne rend donc pas explicite l'impact de ce taux garanti sur les formes des deux contrats (assurés et actionnaires).

Cependant, remarquons que l'on peut réécrire les relations précédentes de la façon suivante (tableau ci-dessous).

La situation 2 illustre particulièrement la localisation d'un des risques des actionnaires. Ceux-ci ont en fait cédé un put aux assurés de prix d'exercice croissant $(1 - p(t))G_t$, ce qui correspond bien sûr à la valeur garantie (après pénalité éventuellement) dans le contrat. Dans cette situation, tout se passe comme si l'assuré avait le droit de vendre à un prix G_t , un actif dont la valeur de marché serait αA_t . Ce put perd toute valeur dans la situation 3 où on retrouve l'efficacité de l'interprétation en terme de calls qui reflète l'effet de levier standard bénéfique aux actionnaires dans les cas positifs. C'est un cas où les assurés "rétrocèdent" une partie de leur "dû" en compensation des garanties supplémentaires auxquelles ils ont droit dans les deux premières situations.

En résumé, la situation des actionnaires peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} CP_t &= (1 - \alpha(1 - p(t)))A_t \\ &\quad + \text{Max}((1 - p(t))G_t - A_t; 0) \\ &\quad - (1 - p(t)) \text{Max}(G_t - \alpha A_t; 0) \\ &\quad + (1 - \delta)(1 - p(t)) \text{Max}(\alpha A_t - G_t; 0) \\ &= (1 - \alpha(1 - p(t)))A_t + \text{Put}(A_t; (1 - p(t))G_t) \\ &\quad + (1 - \delta)(1 - p(t)) \text{Call}(\alpha A_t; G_t) \end{aligned}$$

Les assurés plus l'État récupèrent à l'instant t quelconque en cas de retrait de l'assuré :

$$\begin{aligned} &\alpha(1 - p(t))A_t - \text{Put}(A_t; (1 - p(t))G_t) + (1 - p(t)) \\ &\quad \text{Put}(\alpha A_t; G_t) - (1 - \delta)(1 - p(t)) \text{Call}(\alpha A_t; G_t) \end{aligned}$$

En T , ce flux revient entièrement aux assurés (plus de pénalité fiscale et $p(T)$ est nul).

C'est bien la différence des deux puts qui illustre parfaitement la situation de garantie de l'assuré. Le *Put* de sous-jacent αA_t et de *strike* G_t reflète le seuil garanti dans le contrat quand celui-ci a plus de valeur que la proportion de passif que l'assuré "devrait récupérer" à concurrence de ce qu'il a financé au départ. Le deuxième put démontre le fait que cette garantie n'est pas absolue en cas de faillite de la compagnie, la responsabilité des actionnaires restant néanmoins limitée.

Dans la pratique la situation est encore plus complexe. L'administration française, sur l'initiative de la Commission de contrôle des assurances, a mis en place un fonds de garantie en juillet 1999 (loi n°99-532 du 25 juin 1999 relative à l'épargne et à la sécurité financière et décret d'application⁽¹⁾ n° 99-688 de l'article 68 de la loi) qui interviendrait si aucun repreneur ne se présente. Jusque-là, seule Europavie parmi les sociétés d'assurance-vie avait été mise en liquidation judiciaire (en 1997) et la FFSA avait alors proposé que chaque assureur-vie contribue au prorata des provisions mathématiques à l'insuffisance d'actif d'Europavie pour assurer la continuité du portefeuille de contrats des assurés.

Ainsi que l'on vient de le rappeler, les contrats d'assurance-vie sont bien assortis d'options jouant d'ailleurs en sens opposé suivant le scénario. Néanmoins il nous semble inexact d'affirmer que la valeur de ces contrats est la simple addition/soustraction des valeurs de type Black/Scholes des options sous-jacentes et ce pas seulement parce qu'une partie des actifs de la compagnie d'assurance est peu liquide (immobilier) et que le raisonnement de duplication du sous-jacent n'est pas parfaitement applicable en continu !

Notre argument est le suivant. L'ensemble des contrats optionnels impliqués dans la description du contrat de type assurance-vie sont des options américaines car exerçables à tout moment choisi par

	1 : $A_t < (1 - p(t))G_t$	2 : $\alpha(1 - p(t))A_t < (1 - p(t))G_t < A_t$	3 : $G_t < \alpha A_t$
F_t	$\alpha(1 - p(t))A_t + (1 - p(t))(G_t - \alpha A_t) - ((1 - p(t))G_t - A_t)$	$(1 - \phi(t))(1 - p(t))[\alpha A_t + (G_t - \alpha A_t)] + \phi(t)F_0$	$(1 - \phi(t))(1 - p(t))[\alpha A_t - (1 - \delta)(\alpha A_t - G_t)] + \phi(t)F_0$
CP_t	0	$(1 - \alpha(1 - p(t)))A_t - (1 - p(t))(G_t - \alpha A_t)$	$(1 - \alpha(1 - p(t)))A_t + (1 - \delta)(1 - p(t))(\alpha A_t - G_t)$
État	0	$\phi(t)((1 - p(t))[\alpha A_t + (G_t - \alpha A_t)] - F_0)$	$\phi(t)((1 - p(t))[\alpha A_t - (1 - \delta)(\alpha A_t - G_t)] - F_0)$

l'assuré. Cependant, l'assuré ne peut qu'exercer l'option il ne peut en aucun cas la revendre. Par conséquent, l'exercice de l'option ne se fera pas par comparaison avec une valeur de marché de l'option, mais par comparaison avec le profil de rendement que l'assuré peut se procurer ailleurs. La valeur d'une option américaine traditionnelle est le maximum entre sa valeur d'exercice et l'espérance (sous la probabilité dite " neutre au risque ") de ses flux futurs (en cas de non-exercice immédiat).

Le risque de l'actionnaire est donc différent du risque d'un détenteur d'option financière : dans une option financière le détenteur exerce au pire moment du point de vue de l'espérance des gains, ce qui n'est pas forcément le cas ici. Cependant, l'exercice de l'option de sortie diminue le levier bilantiel et ainsi pénalise les actionnaires.

Cet autre risque n'est pas pris en compte par l'évaluation pure et simple de l'option comme une option négociable, risque engendré par la sortie des assurés de leur contrat si la rémunération est meilleure à l'extérieur, par exemple si les taux remontent, d'une part parce que la baisse de valeur de l'actif va se répercuter sur le taux de rendement servi à l'assuré, et, d'autre part, parce qu'une partie du bénéfice ne leur revient pas (une proportion $(1 - \delta)$ revient aux actionnaires).

C'est donc bien une option réelle (et non purement financière) que détient l'assuré, puisqu'elle est non négociable et qu'elle a un impact sur l'activité "industrielle" de la compagnie.

Quand on regarde la décomposition de la valeur des capitaux propres, on voit bien qu'indépendamment de la rentabilité effective de l'actif depuis le début du contrat jusqu'au moment du retrait, la taille de l'actif (et du passif) de la compagnie a un impact sur la valeur des capitaux propres. Si l'actif n'a subi aucun retrait on a :

$$\alpha A_t - G_t = \alpha A_t - \alpha A_0 \exp(\rho_0 t) \\ = \alpha A_0 \exp((R - \rho_0)t)$$

où R désigne la rentabilité passée du portefeuille d'actif jusqu'en t définie par :

$$A_t = A_0 \exp(R t).$$

Il est donc clair que les trois "actifs dérivés" composant la valeur des capitaux propres ont des valeurs directement proportionnelles à la valeur du bilan au départ. Cela signifie que plus αA_0 est important, plus l'effet de levier pour les actionnaires sera important (en négatif comme en positif) : αA_0 représente la part du bilan financée par les assurés. Si cette part diminue (retrait des assurés) le risque futur représenté par le *Put* écrit et le surplus de rentabilité représenté par le call détenu diminuent.

En résumé, deux types de risque menacent la compagnie d'assurance-vie :

- le risque lié au put détenu par les assurés *Put* ($\alpha A_t ; G_t$) qui leur garantit une rentabilité minimum. Ce risque est diminué du put détenu par les actionnaires symbolisant la responsabilité limitée ;
- le risque de voir la taille du bilan diminuer. Ce risque joue en sens inverse si on est dans la zone d'exercice du put détenu par les assurés. C'est un risque portant sur la rentabilité future des capitaux propres.

Ce risque n'est pas formalisé par une analyse en termes d'options financières : du strict point de vue d'une option américaine, les dividendes versés par les actions du portefeuille seront effectivement réinvestis dans le portefeuille et il n'y a donc pas d'intérêt à exercer pour toucher le dividende. L'exercice se fait pour d'autres raisons que nous décrivons ci-dessous.

Analyse quantitative et impact des paramètres du contrat sur le risque couru

En début de période, la valeur de l'actif de la compagnie est de une unité (1 million d'euros par exemple) dont une part α est financée par les primes versées par les assurés dans un contrat de durée de vie de 8 ans. Ces liquidités sont placées dans un portefeuille d'actifs composé d'actions (en proportion θ_s), d'immobilier (en proportion θ_l) et d'obligations (en proportion θ_b). Avec : $\theta_b + \theta_l + \theta_s = 1$.

Nous faisons varier la volatilité globale de l'actif en respectant les contraintes légales d'investissement.

Le taux garanti est fixé à 3,5 %. Le degré de participation au bénéfice varie entre 85 et 90 %.

Nous étudions des structures de bilan radicalement différentes ($\alpha = 50 \%, 90 \%$). Dans la plupart des cas la valeur de α est proche de 90 %. Nous menons les autres simulations à titre de comparaison, pour mettre en évidence le rôle important de l'effet de levier. La pénalité de la compagnie, $p(t)$, est fixée à 4 % et la fiscalité de base, $\phi(t)$, est la suivante : si $t < 4$ ans la fiscalité est de 40,9 % sur la plus-value par rapport à l'apport initial. Elle est de 20,9 % entre 4 et 8 ans et se réduit à la CSG (10 %) après 8 ans. Cette fiscalité correspond à celle en vigueur en 1997 au moment de la signature d'un grand nombre de contrats⁽²⁾.

Les résultats numériques présentés dans la suite ont été obtenus par des simulations menées dans le projet Amazone⁽³⁾ de simulations financières sur super ordinateur vectoriel NEC SX.

Description de la modélisation

Pour simplifier la simulation, la partie obligataire de l'actif de la compagnie est supposée détenue en totalité dans un zéro-coupon émis en début de période et de maturité 8 ans. L'évolution du prix du zéro-coupon est modélisée par le biais du modèle de Vasicek (1977) pour l'évolution du taux court, mais on pourrait facilement introduire n'importe quel modèle plus complexe d'évolution de la gamme des taux. Les principaux résultats de ce modèle sont présentés en annexe 1. La proportion de zéro-coupon dans l'actif est de 95 %, 85 % ou 75 % suivant les simulations. La partie action de l'actif de la compagnie est supposée répartie sur 10 titres de corrélations diverses, dont l'évolution est supposée dirigée par 10 facteurs et modélisée à l'aide d'un modèle lognormal multidimensionnel. Une matrice de volatilité pour les facteurs, de composantes s'étalant entre 5 % et 35 %, est générée aléatoirement de façon à obtenir des corrélations typiques d'un marché domestique. La prime de risque (par unité de risque) sur l'ensemble de ces actions est fixée à 0,06⁽⁴⁾. Nous supposons que la compagnie d'assurance connaît les paramètres de la diffusion des actifs et qu'elle optimise donc la valeur à 8 ans de son portefeuille global pour un niveau de volatilité qu'elle se fixe (on regarde trois niveaux types de volatilité).

La résolution d'un problème d'optimisation permet de répartir optimalement les proportions de chaque action à détenir initialement pour maximiser le prix de l'actif dans 8 ans sous une contrainte non linéaire de variance et de proportions action/obligation/immobilier fixées. Dans cette étude nous présentons les résultats obtenus dans le cas où la variance est maximale, minimale et intermédiaire pour une proportion totale d'actions dans l'actif variant sur 20 %, 10 % et 0. Enfin la proportion d'immobilier dans l'actif est fixée à 5 % et l'évolution du prix de cette partie de l'actif est modélisée par un processus de diffusion lognormal à un facteur non corrélé avec les facteurs des actions. Nous renvoyons en annexe 2 la présentation de l'ensemble des valeurs des paramètres de la modélisation de l'actif.

Au cours des simulations, nous supposons que l'assuré prend la décision de sortir du contrat ou non, selon un critère de comparaison entre ce que peut lui offrir son contrat et ce que lui propose le marché extérieur : une fois par an, l'assuré estime la rentabilité $\bar{R}$ historique (*ex post*) de son contrat telle que $F_t = F_0 \exp(t \bar{R})$. L'assuré compare la valeur de son contrat (pénalisée en cas de sortie et réinvestie au taux spot zéro-coupon du marché $R(t,8)$ jusqu'à

l'échéance de 8 ans) avec une prévision de la valeur à 8 ans de son contrat calculée à l'aide de $\bar{R}$. Ainsi, l'assuré sort du contrat au premier instant τ tel que

$$[(1 - \phi(\tau))(1 - p(\tau))(F_\tau - F_0) + F_0]$$

$$\exp((8-\tau)R(\tau,8)) > \lambda F_\tau \exp((8-\tau)\bar{R})$$

Le paramètre de latence $\lambda \geq 1$, propre à chaque individu, mesure la rationalité de celui-ci face à son critère, c'est-à-dire la rapidité avec laquelle il met en application son critère. Une forte latence décrit un individu qui attend avant de mettre son critère de sortie en application.

Ce critère correspond au comportement d'un individu n'ayant pas d'information sur les paramètres des diffusions des actifs composant le portefeuille d'investissements et qui regarde le passé comme la meilleure prévision de l'avenir, de façon plutôt irrationnelle. C'est un comportement observé par les compagnies d'assurance chez ce type de clientèle privée. Une latence prise entre 1 et 1,4 permet de modéliser tous les types de comportement. Par définition, la latence ne peut être inférieure à 1 puisqu'elle mesure le temps de réaction par rapport à une décision purement rationnelle. Nous remarquons que 1,4 est une bonne valeur pour décrire les individus qui ne réagissent pas du tout.

Nous avons fait varier la composition de l'actif, (c'est-à-dire la part investie dans les actions, 0, 10 ou 20 %), la part en immobilier restant à 5 % et la part en zéro-coupon faisant le complément), la volatilité de cet actif au travers du niveau de volatilité choisi pour le portefeuille actions (celui-ci étant de toute façon optimisé selon un critère moyenne/variance), le degré de participation aux bénéfices (80, 85 ou 90%), la structure du passif (avec une part financée par l'assurance-vie de 50 ou 90 %) et la latence de l'assuré (entre 1 et 1,4). Pour chaque configuration choisie, nous effectuons un ensemble de 50 000 scénarios aléatoires, chaque scénario correspondant à une trajectoire simulée du prix des actions, de l'immobilier et des taux, suivant les modèles présentés plus haut. Prix et taux sont modélisés par des processus aléatoires solutions d'équations différentielles stochastiques (E.D.S, données dans l'annexe 1). Nous utilisons pour la simulation de ces processus la méthode standard de discrétisation d'E.D.S. par le schéma d'Euler (voir Lamberton et Lapeyre (1996) pour une introduction à ces méthodes dans le cadre des processus utilisés en finance et Bally et Talay (1996) ainsi que Bouleau et Lepingle (1993) pour des résultats de vitesse de convergence). Sur la base de ces 50 000 scénarios nous évaluons par la méthode de Monte Carlo différentes statistiques sur les composantes du bilan (espérance, variance, skewness, kurtosis). On pourra consulter Lapeyre, Pardoux, et Sentis (1998) et Bouleau et Lepingle (1993) pour une introduction aux méthodes de Monte Carlo. Pour ce choix de

50 000 scénarios, les formules fermées que nous avons obtenues nous assurent une précision numérique au 1/1000 pour le calcul de la rentabilité à 8 ans de l'actif si l'assuré ne sort pas. Nous présentons ici un résumé des résultats les plus significatifs.

Résultats

Les études numériques obtenues permettent d'analyser le risque dû à la position des compagnies dans leur portefeuille de clients en assurance-vie.

Les paramètres importants sont :

- la part du bilan α initiale financée par les contrats d'assurance, pour laquelle nous avons pris deux valeurs types (50 %, 90 %). 90 % correspond à la valeur habituelle que l'on peut trouver dans les compagnies d'assurance françaises, 50 % est une valeur de comparaison ;
- la part θ_s de l'actif investi en actions (0 %, 10 %, 20 %) ;
- la volatilité choisie par les managers de la compagnie pour l'actif global (0,25 % pour 0 % d'actions, 2,5 %, 5,1 % et 8,4 % pour 10 % d'actions et enfin 5 %, 11 % et 16,8 % pour 20 % d'actions) ;
- la latence de l'assuré λ (1 ; 1,1 ; 1,2 ; 1,3 et 1,4) ;
- la participation aux bénéfices $\delta = 85$ %.

La première constatation est l'impact important du niveau de latence sur le nombre de sorties et l'impact de l'effet de levier sur le nombre de faillites de la compagnie. Les résultats concernant ces deux valeurs sont reportés dans le tableau 1 pour une part d'actions dans l'actif variant de 0 à 20 % et pour deux niveaux différents de part α du passif financée par l'assurance-vie (50 %, 90 %). Les résultats sont présentés pour le niveau de volatilité minimum de l'actif à 8 ans possible pour chaque composition d'actif. L'impact de la volatilité sera étudié

ultérieurement. Ce niveau minimum étant choisi en amont par la compagnie d'assurance pour son portefeuille d'actifs, ces volatilités sont calculées *a priori*, sans prendre en compte les éventuelles sorties anticipées des clients.

Avec une latence de 1,4 l'individu sort très peu alors qu'il peut y avoir jusqu'à près de 37 000 sorties pour un individu de latence 1. Par exemple, pour un actif investi uniquement en immobilier et obligations, un individu de latence 1,4 ne sort pratiquement jamais du contrat alors que le nombre de sorties est respectivement de l'ordre de 37 000 (soit 74 % des scénarios) et 11 000 (22 % des scénarios) pour les individus de latence 1 et 1,2. Les sorties se font dans des scénarios de hausse des taux quand la rémunération est plus forte à l'extérieur que sur le contrat du client. On voit l'extrême importance que peut représenter pour les compagnies une évaluation correcte de la latence moyenne de leurs assurés. Nous verrons que ce phénomène a un impact important sur la rentabilité de la compagnie. Il implique aussi des conséquences en termes de gestion ALM.

Notons que le critère de sortie du client est indépendant de la structure du bilan (paramétrée par α), ce qui apparaît clairement dans les résultats du tableau 1 où le nombre de sorties est indépendant de α . Nous avons constaté que le nombre de sorties est très peu sensible au taux de participation dès lors qu'il ne varie pas énormément (entre 80 et 90 %). Nos résultats seront donc toujours présentés avec un taux de participation de 85 %.

Le nombre de sorties a, comme nous le verrons ci-dessous, un impact important sur la rentabilité effective de l'actif et des capitaux propres ; en revanche, il n'est pas réellement lié au nombre de faillites.

Tableau 1 : nombre de sorties anticipées et faillites (volatilité minimum : 0,25 % pour 0 % d'actions, 2,5 % pour 10 % d'actions et 5 % pour 20 % d'actions) $\alpha = 50$ %

Tableau 1a : $\alpha = 50$ %

θ_s	0 %					10 %					20 %				
Latence	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4
N. de sorties	36709	21000	11614	6182	29	33482	20293	12004	4899	29	32384	22990	15445	4444	20
N. de faillites	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 1b: $\alpha = 90$ %

θ_s	0 %					10 %					20 %				
Latence	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4
N. de sorties	36709	21000	11614	6182	29	33482	20293	12004	4899	29	32342	22948	15445	4444	20
N. de faillites	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	42	51	111	381	478

Ainsi, pour $\alpha = 90\%$, les clients de faible latence sortent moins quand la part des actions est importante (plus forte rentabilité) et le nombre de faillites est plus grand (volatilité plus importante). Ceci est dû au fait que les sorties sont plutôt conditionnées par une hausse des taux et par définition diminuent le risque de faillite (puisque le client est sorti) et que les faillites sont conditionnées par une baisse des taux (qui ne génère pas de sorties à cause du taux garanti). Cependant, malgré un faible taux de faillites et dans la mesure où le nombre de sorties des contrats est important, une latence faible de l'assuré représente un risque pour la compagnie au sens où la taille du bilan diminue, la part représentée par les assurés également et donc la rentabilité des capitaux propres comme celle de l'actif en est affectée (en espérance).

Le tableau 2 montre les valeurs (en espérance) au bout de huit ans de l'actif et des capitaux propres de la compagnie pour une part d'actions dans l'actif variant de 0 à 20 %, une volatilité minimum et les deux niveaux différents de part du passif financée par l'assurance-vie ($\alpha = 50\%$, 90%). La valeur initiale de l'actif est 1. La valeur initiale des capitaux propres est respectivement de 0,5 et 0,1 pour les deux niveaux de α .

L'aspect important des résultats est que les valeurs espérées de l'actif et des capitaux propres sont croissantes en la latence. La diminution des sorties des assurés due à une forte latence a donc un impact direct sur l'augmentation de la valeur moyenne. Pour $\theta_s = 20\%$ et $\alpha = 90\%$, le plus grand nombre de faillites dans les cas de forte latence ne vient pas compenser en moyenne ce résultat.

Cependant, la valeur espérée de l'actif est décroissante en α . La valeur du bilan est toujours moindre quand la part du passif représentée par l'assurance-vie est plus importante : en effet dans chaque scénario qui s'accompagne de sorties des assurés, le remboursement de ces derniers conduit à une diminution de la taille du bilan d'un facteur α (à la pénalité de la compagnie près si la sortie est avant 8 ans).

Plus α est grand, plus fort est l'impact sur la taille moyenne de l'actif. Cet impact est lui-même beaucoup plus faible voire nul pour les fortes valeurs de latence : lorsqu'il n'y a quasiment pas de sorties (pour une latence de 1,4) la valeur du bilan est quasi insensible à la part financée par l'assurance-vie. Ainsi, l'option de sortie des clients a pour conséquence que la valeur du bilan de la compagnie est affectée par son financement. Cet impact est d'autant plus important que la latence est faible et les sorties nombreuses.

Nous nous intéressons maintenant plus spécifiquement à la rentabilité des capitaux propres. Le levier dû à la part du passif financée par les contrats a un effet ambigu : α augmente la rentabilité des capitaux propres en l'absence de sorties mais augmente aussi l'effet de ces sorties pour des latences faibles. La répercussion sur la rentabilité des capitaux propres de ce phénomène n'est pas linéaire. On peut dire que dans les cas standards la rentabilité des capitaux propres sera augmentée par le levier représenté par l'assurance-vie. Mais si la latence de l'assuré est faible, ce phénomène sera contrebalancé par le nombre de sorties du contrat. Le graphique suivant montre les résultats pour une part d'actions de 0 % et 20 % dans l'actif de la compagnie.

Graphique 1 : rentabilité espérée des capitaux propres pour $\theta_s = 0$ et $\theta_s = 20\%$ et une volatilité minimale des actions

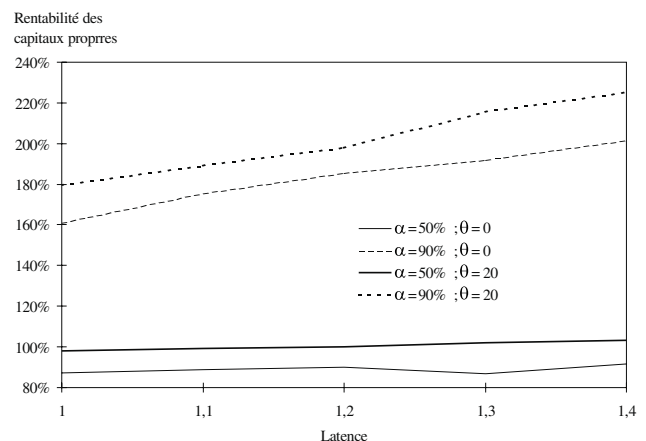
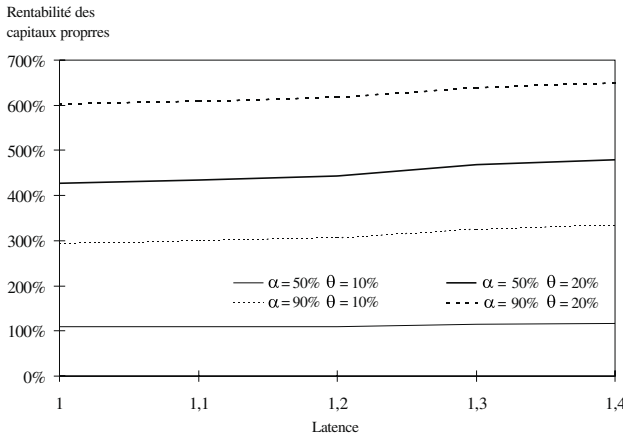


Tableau 2 : valeurs (en espérance) des actifs et capitaux propres à 8 ans (volatilité minimum : 0,25 % pour 0 % d'actions, 2,5 % pour 10 % d'actions et 5 % pour 20 % d'actions)

θ_s	0 %					10 %					20 %				
Latence	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4
$\alpha = 50\%$ Actif	1,15	1,42	1,58	1,67	1,78	1,24	1,47	1,62	1,74	1,82	1,31	1,47	1,6	1,79	1,87
Cap. propres	0,93	0,94	0,95	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,99	0,99	0,99	1	1,01	1,02
$\alpha = 90\%$ Actif	0,65	1,13	1,42	1,58	1,77	0,78	1,19	1,45	1,67	1,82	0,86	1,15	1,38	1,72	1,86
Cap. propres	0,26	0,27	0,28	0,29	0,3	0,27	0,28	0,29	0,3	0,31	0,28	0,28	0,3	0,31	0,32

On peut visualiser ici le double effet de la part des actions dans l'actif (qui augmente la rentabilité espérée) et de la part du passif financé par les contrats (qui augmente également la rentabilité espérée). La valeur espérée globale du bilan est décroissante en α comme nous venons de le voir (à cause des sorties), mais pas la rentabilité des capitaux propres qui bénéficie d'un effet de levier plus important.

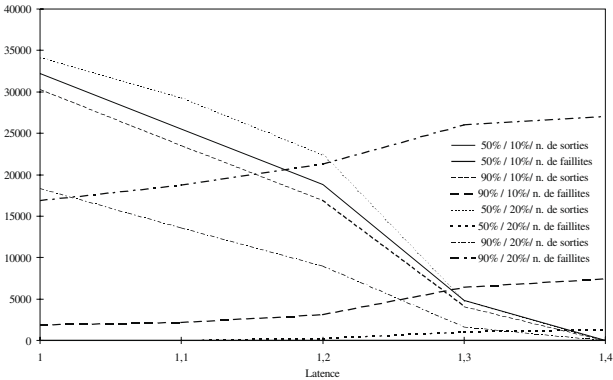
Graphique 2 : rentabilité espérée des capitaux propres pour une volatilité des actions maximale



Le graphique suivant montre l'effet sur la rentabilité des capitaux propres pour un actif plus risqué : sont représentés les résultats pour les deux niveaux de α , pour une part d'actions de 10 et 20 % et dans ces deux cas pour la volatilité maximum possible (8,4 % de volatilité pour une part d'action θ_s égale à 10 % dans l'actif et 16,8 % de volatilité pour une part d'action de 20 %).

Pour des niveaux de volatilité importants on retrouve un comportement similaire de la rentabilité des capitaux propres : la rentabilité est croissante en θ_s (part des actions) et en α . Il est intéressant de remarquer que l'effet de θ_s est beaucoup plus important que celui de α : une augmentation de la volatilité s'accompagne d'une meilleure rentabilité moyenne du contrat offert aux assurés et va donc avoir le double effet d'un actif plus rentable et de moindre sorties. L'augmentation du levier a un effet plus ambigu comme expliqué précédemment.

Graphique 3 : sorties et faillites pour une part d'actions de 10% ou 20%



Ces phénomènes sont illustrés ci-dessous dans le graphique 3, par le nombre de faillites et de sorties observables pour une volatilité maximale.

Le schéma précédent illustre la contrepartie négative de l'augmentation de la rentabilité due au levier ou à la part d'actions dans l'actif. Le cas le plus rentable (en moyenne) s'accompagne d'un accroissement phénoménal des faillites : on observe une extrême sensibilité du taux de faillite à la valeur de la volatilité, sensibilité particulièrement forte pour un effet de levier important. Pour une part d'action à 20 % et $\alpha = 90\%$ le taux de faillites peut atteindre 50 %, alors qu'il est absolument nul si l'actif est entièrement investi en immobilier et en obligations et nul encore pour un $\theta_s = 10\%$ et un α de 50 %. C'est donc la combinaison des valeurs de ces deux paramètres qui est particulièrement déterminante pour la faillite. Remarquons de nouveau que c'est l'augmentation du levier qui a le plus fort impact.

Dans le cas d'une forte volatilité du portefeuille investi en actions, il paraît donc raisonnable que la part d'actif de ce dernier ne dépasse pas 10 %. Dans le cas contraire le risque lié à la très forte volatilité des actions couplée à la promesse du taux garanti est catastrophique.

Remarquons que le temps de sortie de l'assuré se situe en (moyenne) au cours de la deuxième année avec de petites fluctuations en fonction de la latence et de la volatilité :

Tableau 3 : espérance de la date de sortie anticipée (en année). Pour chaque part θ_s en actions, la volatilité de l'actif est minimum

θ_s	0 %					10 %					20 %				
Latence	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4
$\alpha = 50\%$	1,54	1,25	1,12	1,04	1	1,49	1,25	1,13	1,02	1	1,48	1,29	1,13	1,02	1
$\alpha = 90\%$	1,54	1,25	1,12	1,04	1	1,49	1,25	1,13	1,02	1	1,48	1,3	1,13	1,02	1

Tableau 4 : espérance de la date de fin du contrat (faillite comprise, en année). Pour chaque part θ_s en actions, la volatilité de l'actif est minimum

θ_s	0 %					10 %					20 %				
Latence	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1	1,1	1,2	1,3	1,4
$\alpha = 50\%$	3,25	5,16	6,4	7,1	7,99	3,64	5,26	6,35	7,31	7,99	3,77	4,91	5,88	7,38	7,99
$\alpha = 90\%$	3,25	5,16	6,4	7,1	7,99	3,64	5,26	6,35	7,31	7,99	3,77	4,91	5,87	7,34	7,94

Tableau 5 : statistiques sur le rendement à 8 ans des capitaux propres

Tableau 5 a : $\theta_s = 0\%$, $\alpha = 90\%$

Niveau de volatilité de l'actif	0,25 %		
Latence	1	1,2	1,4
Écart-type du rendement	27,45 %	30,33 %	5,18
Skewness	0,196	- 1,58	- 18,54
Kurtosis	- 0,038	1,396	603,43
Jacques Bera	< 0,001	< 0,001	< 0,001

Tableau 5 b : $\theta_s = 10\%$, $\alpha = 90\%$

Niveau de volatilité de l'actif	2,50 %			5,10 %			8,40 %		
Latence	1	1,2	1,4	1	1,2	1,4	1	1,2	1,4
Écart-type du rendement	47,32 %	50,49 %	34,78 %	89,44%	95,44%	81,10 %	149,10 %	162,40 %	175 %
Skewness	0,4783	- 0,394	0,156	0,471	0,034	- 0,35	0,637	0,313	- 0,242
Kurtosis	0,2455	0,0018	0,3484	0,436	0,019	2,58	0,903	0,195	0,106
Jacques Bera	< 0,001	< 0,001	< 0,001	< 0,001	[0,01; 0,001]	< 0,001	< 0,001	< 0,001	< 0,001

Tableau 5c : $\theta_s = 20\%$, $\alpha = 90\%$

Niveau de volatilité de l'actif	5 %			11 %			16,80		
Latence	1	1,2	1,4	1	1,2	1,4	1	1,2	1,4
Écart-type du rendement	84,40 %	90,83 %	77,62 %	190,60 %	206,90 %	226 %	315 %	333 %	351 %
Skewness	0,521	0,0046	- 0,301	0,841	0,562	0,18	1,85	1,69	1,56
Kurtosis	0,568	0,05	0,237	1,28	0,441	- 0,18	5,46	4,25	3,38
Jacques Bera	< 0,001	< 0,001	< 0,001	< 0,001	< 0,001	< 0,001	< 0,001	< 0,001	< 0,001

C'est en effet en début de période que le rendement historique du contrat (que l'assuré intègre dans son critère de sortie) est le plus sensible à la volatilité de l'actif. Passé le cap des trois premières années, le rendement historique est plus robuste aux variations locales de la rentabilité de l'actif. S'il se trouve toujours des scénarios dans lesquels les assurés sortent plus tard, le rendement historique va, au cours du temps, refléter en moyenne de mieux en mieux la rentabilité espérée de l'actif (qui est dans tous les cas supérieure au taux garanti).

Les résultats précédents nous ont montré l'extrême sensibilité des résultats notamment au couple levier /

part d'actions dans un contexte de forte volatilité. On peut compléter cette analyse par l'étude de la variabilité des résultats (exprimée par l'écart-type du rendement à 8 ans des capitaux propres) et par le calcul des autres moments de la distribution. Pour un niveau α de 90 % et différents niveaux de parts d'action, le tableau 5 ci-dessous montre l'impact de la volatilité du portefeuille d'actifs sur la volatilité du rendement des capitaux propres.

L'écart-type du rendement des capitaux propres est croissant en la valeur de θ_s et en la volatilité des actifs. Les hauts niveaux de volatilité obtenus correspondent au grand nombre de scénarii se

soldant par une faillite et/ou au grand nombre de sorties. Comme le nombre de faillites est par ailleurs croissant (mais concave) en la latence et le nombre de sorties décroissant (mais convexe) en la latence, le point le plus risqué semble être pour une latence de 1,2 (ce qui n'est pas une bonne nouvelle puisque c'est une valeur moyenne).

L'augmentation du nombre de sorties (par diminution de la latence) affecte la symétrie de la distribution. Les cas de skewness négatifs correspondent aux cas où les faillites sont en moyenne pénalisantes au sens où les écarts à la moyenne négatifs sont supérieurs aux écarts à la moyenne positifs.

Dans tous les cas nous avons calculé la statistique de Jarque Bera qui suit un *Chi deux* à deux degrés de liberté sous hypothèse de normalité : les probabilités affichées sont celles d'être réellement en présence de lois normales en ayant obtenu ces valeurs de *skewness* et *kurtosis*. Ces probabilités sont donc extrêmement faibles ce qui suggère que les options du contrat ont éloigné les rendements des capitaux propres d'une distribution normale, qui auraient été obtenus en dehors de ce contexte.

Conclusion

Nous avons vu que le profil de risque induit par les contrats d'assurance-vie est très complexe car le risque ne se résume pas à la couverture de la sortie d'un détenteur d'une option américaine. Par ailleurs le lien entre le nombre de sorties et le nombre de faillites n'est pas évident et les effets des paramètres sont extrêmement sensibles et non-linéaires .

Cependant, il apparaît que le contrat en lui-même et donc la réglementation, ne sont pas générateurs de faillites pour le niveau de fiscalité effectif des contrats d'assurance-vie assez pénalisant, puisque l'impact principal est le choix d'allocation d'actifs et notamment la volatilité du portefeuille choisi par l'assureur. Par ailleurs le niveau de latence des assurés est également fondamental et nous ne serions trop recommander aux compagnies d'assurance d'essayer d'estimer ce paramètre.

Dans tous les cas, un levier de 90 % couramment rencontré dans la pratique augmente l'exposition au risque de faillite et doit être compensé par une part très raisonnable de l'actif investi dans les actions (20 % est d'évidence trop risqué) et un choix de volatilité du portefeuille d'actions prudent.

Depuis quelques années, les assureurs recourent de plus en plus aux produits dérivés pour répondre à ce profil de risque très spécifique, même si la

Commission de Contrôle des Assurances s'inquiète du risque de contrepartie lié à ces produits⁽⁵⁾.

La couverture à mettre en place est celle qui couvre le risque de rentabilité du portefeuille par rapport à la rentabilité supposée être une référence pour l'assuré et non pas la couverture des options telles qu'elles ont été décrites traditionnellement. Un exemple type est l'utilisation des Caps sur taux longs (par exemple le TEC 10). En cas de hausse des taux, l'exercice (automatique) du cap procure un revenu qui vient augmenter les rendements susceptibles d'être servis aux assurés, les décourageant ainsi de procéder à des rachats anticipés. Ainsi un cap à barrière activante permet de diminuer le coût de la couverture et de la rendre active pour des seuils provoquant des départs des assurés. La barrière pourrait donc être fixée en fonction de la typologie des clients dans le portefeuille. L'optimisation de la couverture et en particulier le choix du niveau de la barrière activante est un domaine de recherche qui reste à explorer.

Notes

(1) Le décret n° 99.688 du 3 août 1999 pris pour l'application de l'article 68 de la loi n°99.532 du 25 juin 1999 renforce la gestion actif passif à l'article 5 qui préconise la conduite de simulations de l'impact des mouvements de marché sur l'actif et sur le passif et des estimations de l'exigibilité du passif et de la liquidité de l'actif. Cette remarque est due à un rapporteur.

(2) Depuis la fiscalité s'est alourdie : les prélèvements au titre de la CSG sont passés à 10 % et un nouveau prélèvement de 7,5 % a été institué à la sortie du contrat.

(3) Amazone est une action du G.I.E Dyade de collaboration BULL-INRIA.

<http://www.dyade.fr/fr/actions/amazone/amazone.html>.

(4) Cette valeur correspond à l'ordre de grandeur des valeurs trouvées empiriquement sur différents marchés : voir par exemple Chan, Karceski et Lakonishok (1999).

(5) Les dérivés sont le plus souvent des instruments de gré à gré, dont le montage est adapté aux besoins spécifiques de la Compagnie. Dans ce cas là, il existe toujours une probabilité non nulle de faillite de la contrepartie. Ce risque est appelé risque de contrepartie ou risque de crédit.

Bibliographie

Babbel D.F. et Santomero A.M.(1999). "An analysis of the Financial Risk Management Process Used by Life Insurers" dans *Changes in the Life Insurance Industry: Efficiency, Technology and Risk Management*, pp. 279-326.

Bally V. et Talay D. (1996). "The Law of the Euler Scheme for Stochastic Differential Equations (I) : Convergence Rate of the Distribution Function", *Probability Theory and Related Fields*, 104, pp. 43-60.

Bouleau N. et Lepingle D. (1993). *Numerical Methods for Stochastic Processes*, J. Wiley.

Chan L.K., Karceski C.J. et Lakonishok J. (1999). "On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model", *Review of Financial Studies*, 12(5), pp. 937-74.

Lamberton D. et Lapeyre B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman and Hall.

Lapeyre B., Pardoux E. et Sentis R. (1998). "Méthodes de Monte Carlo pour les équations de transport et de diffusion", *Mathématiques et Applications* 29, Springer.

Vasicek O. (1977). "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.

Annexe 1 : modélisation de la partie obligation de l'actif de la compagnie :

Elle est supposée intégralement composée de zéro-coupon émis à la date 0.

Le prix du zéro-coupon repose sur la modélisation du taux Vasicek :

$$dr_t = \beta(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Avec les valeurs :

$$\mu = 0,075$$

$$\beta = 0,7$$

$$\sigma = 0,03$$

L'équation du prix du zéro coupon s'écrit

$$dB(t, T) = \mu(t, r_t, T)B(t, T)dt - \sigma_z(t, T)B(t, T)dB_t$$

Le prix du zéro-coupon à la date t (de maturité T) est donné par

$$B(t, T) = \exp(-r_t K(t, T) - \Gamma(t, T))$$

où

$$\mu(t, r_t, T) = r_t + \lambda \sigma K(t, T)$$

$$\sigma_z(t, T) = \sigma K(t, T)$$

$$K(t, T) = \frac{1}{\beta} (1 - \exp(-\beta(T - t)))$$

$$\Gamma(t, T) = -K(t, T)R_\infty + \frac{\sigma}{4\beta} K(t, T)^2 + (T - t)R_\infty$$

$$R_\infty = \mu + \lambda \frac{\sigma}{\beta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\beta} \right)^2$$

Modélisation de la partie action de l'actif de la compagnie

L'évolution des prix des actions entrant dans la composition de l'actif est supposé suivre le modèle lognormal multidimensionnel. Le modèle s'écrit sous la forme :

$$dS_t^i = S_t^i \left(\mu^i(t) dt + \left(\underline{\sigma} dW_t \right)^i \right)$$

$$i = 1, \dots, N \quad \underline{\sigma} \in L(R^F; R^N)$$

où N est le nombre de titres et F le nombre de facteurs browniens. Dans nos simulations, N et F valent 9. La matrice σ est déterminée de la façon suivante. On fixe les bornes, la borne supérieure à 0,35 et la borne inférieure à 0,05. On tire pour chaque titre un nombre de facteurs dominants puis leurs positions ainsi que la variance associée

au titre. Ensuite on tire les valeurs de $\sigma_{i,j}$ dans l'intervalle déterminé par les bornes supérieure et inférieure ; dans le cas où le facteur est un facteur dominant, un centrage est effectué sur la variance du titre.

Le vecteur de rentabilité $\underline{\mu}(t)$ est calculé à une date t en fonction de la matrice $\underline{\sigma}$ et de la valeur du taux spot r_t de la façon suivante :

$$\underline{\mu}^i = r_t + \underline{\sigma} \underline{\lambda}$$

où $\underline{\lambda}$ est le vecteur prime de risque associé aux titres. Ici la prime de risque est fixée pour tous les titres à 0,06 et la valeur moyenne du taux spot (suivant le modèle de Vasicek) vaut 7,5 %.

Si l'assuré ne sort pas du contrat, la rentabilité à 8 ans de l'actif est donnée par :

$$E(R_8(\theta))$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ (r_0 - \mu_r) \frac{1 - e^{-8\beta_r}}{\beta_r} + 8\mu_r - \theta_0^2 \frac{\sigma_r^2}{4\beta_r^3} (4e^{-8\beta_r} - e^{-16\beta_r} + 16\beta_r - 3) \right\}$$

$$+ \lambda_a \sum_{i=1}^N \theta_i \sum_{j=1}^F \sigma_a^{i,j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^F \left(\sum_{i=1}^N \theta_i \sigma_a^{i,j} \right)^2$$

Modélisation de la partie immobilier de l'actif de la compagnie

L'évolution de la valeur de la partie immobilier détenu à l'actif est supposé suivre un modèle lognormal unidimensionnel de la forme

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dZ_t)$$

où Z est un facteur brownien indépendant des facteurs des actions.

Pour nos simulations, μ et σ valent respectivement 3% et 5%.

Annexe 2 : optimisation de l'allocation initiale de l'actif de la compagnie

Dans nos simulations, la proportion θ_i d'immobilier est fixé à 5%. La proportion θ_b peut prendre les Valeurs 95 %, 85 % et 75 %. Ainsi choisir la valeur de θ_b fixe la valeur de la proportion θ_s d'actions, mais il reste à décider de la répartition des N actions sélectionnée pour former la proportion θ_s . Nous avons choisi de calculer cette répartition en résolvant le problème d'optimisation suivant : maximiser l'espérance de l'actif à 8 ans sous une contrainte de proportion entre les trois composant de l'actif, plus une contrainte imposant la variance de l'actif.

Ce problème se présente sous la forme générale suivante : trouver les proportions $(\theta_i, i = 1, \dots, N)$ qui réalisent

$$\max_{\theta \in K} E(Actif_8(\theta)) K = \left\{ \theta \in [0,1]^{N+1}, \sum_{i=1}^{N+1} \theta_i = 1, V \inf \leq \sum_{i=1}^N \theta_i \leq V \sup, Var(Actif_8) = Vobj \right\}$$

Dans notre simulation les valeurs de $Vinf$ et $Vsup$ varient suivant les cas :

	$\theta_s = 0 \%$	$\theta_s = 10 \%$	$\theta_s = 20 \%$
Vsup	0 %	10 %	20 %
Vinf	0 %	10 %	20 %

La valeur de $Vobj$ varie avec suivant les choix de volatilité de l'actif minimum, intermédiaire ou maximum

	$\theta_s = 10 \%$			$\theta_s = 20 \%$		
	Min	Median	Max	Min	Median	Max
Variance de $A(8) = Vobj$	0,17	0,08	0,233	0,073	0,4	1,3
Espérance de $A(8)$ optimisée	1,868	1,955	2,027	1,916	2,112	2,264
Volatilité	2,5 %	5,1 %	8,4 %	5 %	11 %	16,8 %